

KARAKTERISTIK MATRIKS *CENTRO*-SIMETRIS

Berny Pebo Tomasouw

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Pattimura
Jl. Ir. M. Putuhena, Kampus Unpatti, Poka-Ambon, Indonesia
e-mail: peboberny@gmail.com

Abstrak

Matriks *centro*-simetris merupakan matriks simetris yang memenuhi sifat tertentu. Dalam penelitian ini, akan dibahas bentuk dan beberapa sifat dasar dari matriks *centro*-simetris serta nilai eigen dan vektor eigennya.

Kata Kunci: Matriks *centro*-simetris, nilai eigen, vector eigen.

THE CHARACTERISTICS OF CENTROSYMMETRIC MATRICES

Abstract

Centrosymmetric is a symmetric matrix which satisfy some certain conditions. In this paper, we will discuss the form and some basic properties of the centrosymmetric matrix also its eigenvalues and eigenvectors.

Keywords: Centrosymmetric matrix, eigen value, eigen vector.

1. Pendahuluan

Konsep matriks *centro*-simetris muncul dalam buku yang ditulis A. C. Aitken [1] dengan judul “*Determinants and Matrices*”. Sedangkan F. Graybill juga membahas konsep matriks yang sama namun dengan nama matriks *cross*-simetris [2]. Walaupun memiliki nama yang mirip dengan matriks simetris namun sifat yang dimiliki oleh matriks *centro*-simetris sangatlah berbeda.

Beberapa penelitian memperlihatkan bahwa matriks *centro*-simetris mempunyai peranan penting dalam masalah analisis numerik, teori informasi, proses Markov, persamaan diferensial, persegi ajaib maupun pengenalan pola [3-8]. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan dibahas karakteristik dari matriks *centro*-simetris beserta nilai eigen dan vektor eigennya.

Definisi 1. (Matriks Simetris)

Matriks $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dikatakan simetris jika berlaku

$$A = A^T$$

Definisi 2. (Nilai Eigen dan Vektor Eigen)

Diberikan matriks $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dan vektor tak nol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ merupakan nilai eigen dari A jika memenuhi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Vektor \mathbf{x} disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ .

Definisi 3. (Matriks Similar)

Diberikan matriks $A, B \in \mathbf{M}_n(\square)$. Matriks A dikatakan similar dengan B jika terdapat matriks non-singular P sedemikian sehingga berlaku

$$A = PBP^{-1}.$$

Lema 1. Jika matriks A similar dengan matriks B maka $\det(A) = \det(B)$.

Akibat 1. Misalkan matriks A similar dengan matriks B . Jika λ adalah nilai eigen dari A maka λ juga merupakan nilai eigen dari B .

Definisi 4. (Matriks Ortogonal)

Matriks non-singular $Q \in \mathbf{M}_n(\square)$ disebut matriks ortogonal jika memenuhi $Q^T = Q^{-1}$.

Definisi 5. (Matriks contra-identitas)

Matriks persegi J_n disebut matriks contra-identitas jika berbentuk

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lema 2. Matriks contra-identitas memenuhi sifat-sifat berikut :

- $J_n = J_n^T$.
- $J_n^{-1} = J_n$.
- $J_n^k = \begin{cases} I_n, & \text{jika } k \text{ genap} \\ J_n, & \text{jika } k \text{ ganjil} \end{cases}$

Definisi 6. (Rotasi Matriks)

Diberikan $A \in \mathbf{M}_n(\square)$. Rotasi dari matriks A dinotasikan dengan A^R dan didefinisikan sebagai

$$A^R = J_n A J_n.$$

Lema 3. Rotasi matriks A memenuhi sifat-sifat berikut :

- $(A^R)^R = A$.
- $(A^R)^T = (A^T)^R$.
- $(A^{-1})^R = (A^R)^{-1}$, jika A non-singular.

2. Hasil dan Pembahasan

Definisi 7. (Matriks *Centro-Simetris*)

Diberikan matriks S berorde $n \times n$. Matriks S disebut matriks *centro-simetris* jika memenuhi

$$S^R = S$$

Contoh 1. Matriks $S = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ adalah matriks *centro-simetris* karena

$$\begin{aligned} S^R &= J_2 S J_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= S \end{aligned}$$

Contoh 2. Matriks $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks *centro-simetris*.

Contoh 1 di atas memperlihatkan contoh matriks simetris yang juga merupakan matriks *centro-simetris*. Namun hal ini tidak berlaku umum ataupun sebaliknya seperti tampak pada contoh 2 di atas. Lema 4 berikut ini memperlihatkan bentuk umum dari matriks *centro-simetris* berukuran 2×2 dan 3×3 .

Lema 4.

- i. Jika $S = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ maka S adalah matriks *centro-simetris*.
- ii. Jika $S = \begin{bmatrix} a & c & b \\ d & e & d \\ b & c & a \end{bmatrix}$ maka S adalah matriks *centro-simetris*.

Selanjutnya, bentuk umum matriks *centro-simetris* dengan orde $n \geq 4$ dibagi ke dalam 2 kasus yakni n genap dan n ganjil. Untuk kasus n genap yakni $n = 2m$ maka misalkan matriks S berbentuk matriks blok sebagai berikut

$$S = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix},$$

dengan A, B, C , dan D adalah matriks persegi berorde m . Matriks S harus memenuhi $S^R = S$ sehingga

$$J_n S J_n = S$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} O_m & J_m \\ J_m & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_m & J_m \\ J_m & O_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} J_m D J_m & J_m B J_m \\ J_m C J_m & J_m A J_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dari bentuk terakhir diperoleh $D = J_m A J_m$ dan $C = J_m B J_m$. Hasil ini diperlihatkan dalam Lema berikut.

Lema 5. Jika S adalah matriks *centro*-simetris berorde n genap yakni $n = 2m$ maka S dapat ditulis dalam bentuk matriks blok sebagai berikut

$$S = \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix},$$

dengan A dan B adalah matriks persegi berorde m .

Bentuk matriks S pada Lema di atas bukanlah bentuk tunggal karena matriks S dapat juga ditulis dalam bentuk

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ J_m B J_m & J_m A J_m \end{bmatrix} \text{ atau } S = \begin{bmatrix} A & J_m B \\ B J_m & J_m A J_m \end{bmatrix}.$$

Contoh 3. Matriks $S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah matriks *centro*-simetris karena S dapat ditulis dalam bentuk

$$S = \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix} \text{ dengan } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, untuk matriks persegi berorde n ganjil yakni $n = 2m + 1$ maka misalkan S berbentuk matriks blok sebagai berikut

$$S = \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & C \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{r}^T \\ B & \mathbf{s} & D \end{bmatrix}$$

dengan A, B, C, D adalah matriks persegi berorde m , vektor $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^m$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Matriks S harus memenuhi $S^R = S$ sehingga

$$J_n S J_n = S$$

$$\begin{bmatrix} O_m & \mathbf{0} & J_m \\ \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}^T \\ J_m & \mathbf{0} & O_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & C \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{r}^T \\ B & \mathbf{s} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O_m & \mathbf{0} & J_m \\ \mathbf{0}^T & 1 & \mathbf{0}^T \\ J_m & \mathbf{0} & O_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & C \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{r}^T \\ B & \mathbf{s} & D \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_m D J_m & J_m \mathbf{s} & J_m B J_m \\ \mathbf{r}^T J_m & \alpha & \mathbf{q}^T J_m \\ J_m C J_m & J_m \mathbf{p} & J_m A J_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & C \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{r}^T \\ B & \mathbf{s} & D \end{bmatrix}$$

Dari bentuk terakhir diperoleh persamaan :

- $J_m D J_m = A$ dan $D = J_m A J_m$.
- $J_m \mathbf{s} = \mathbf{p}$ dan $J_m \mathbf{p} = \mathbf{s}$.
- $\mathbf{r}^T J_m = \mathbf{q}^T$ dan $\mathbf{r}^T = \mathbf{q}^T J_m$.
- $J_m C J_m = B$ dan $C = J_m B J_m$.

Dari hasil ini dapat dibentuk Lema berikut.

Lema 6. Jika S adalah matriks *centro*-simetris berorde n ganjil yakni $n = 2m + 1$ maka S dapat ditulis dalam bentuk matriks blok sebagai berikut

$$S = \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & J_m B J_m \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{q}^T J_m \\ B & J_m \mathbf{p} & J_m A J_m \end{bmatrix},$$

dengan A, B adalah matriks persegi berorde m , vektor $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya, Lema berikut akan membantu dalam mencari matriks yang similar dengan matriks *centro*-simetris.

Lema 7.

a. Matriks $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_m & I_m \\ -J_m & J_m \end{bmatrix}$ adalah matriks ortogonal berorde $n = 2m$.

b. Matriks $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} & I_m \\ \mathbf{0}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}^T \\ -J_m & \mathbf{0} & J_m \end{bmatrix}$ adalah matriks ortogonal berorde $n = 2m + 1$.

Dengan menggunakan matriks Q_1 dan Q_2 pada Lema ini maka dapat dicari matriks yang similar dengan matriks *centro*-simetris.

Untuk kasus n genap maka misalkan D_1 adalah matriks yang similar. Matriks *centro*-simetris S dan D_1 harus memenuhi $S = Q_1 D_1 Q_1^T$ atau

$$\begin{aligned} D_1 &= Q_1^T S Q_1 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_m & -J_m \\ I_m & J_m \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_m & I_m \\ -J_m & J_m \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2(A - J_m B) & O_m \\ O_m & 2(A + J_m B) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - J_m B & O_m \\ O_m & A + J_m B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sedangkan untuk kasus n ganjil diperoleh matriks D_2 yang similar yaitu

$$\begin{aligned} D_2 &= Q_2^T S Q_2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} & -J_m \\ \mathbf{0}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}^T \\ I_m & \mathbf{0} & J_m \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & J_m B J_m \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{q}^T J_m \\ B & J_m \mathbf{p} & J_m A J_m \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} & I_m \\ \mathbf{0}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}^T \\ -J_m & \mathbf{0} & J_m \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2(A - J_m B) & \mathbf{0} & O_m \\ \mathbf{0}^T & 2\alpha & 2\sqrt{2} \mathbf{q}^T \\ O_m & 2\sqrt{2} \mathbf{p} & 2(A + J_m B) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} A - J_m B & \mathbf{0} & O_m \\ \mathbf{0}^T & \alpha & \sqrt{2} \mathbf{q}^T \\ O_m & \sqrt{2} \mathbf{p} & A + J_m B \end{bmatrix}$$

Dari hasil ini dapat dibentuk Teorema berikut.

Teorema 1.

a. Jika $S = \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix}$ dan $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_m & I_m \\ -J_m & J_m \end{bmatrix}$ maka S similar dengan matriks diagonal blok

$$D_1 = \begin{bmatrix} A - J_m B & O_m \\ O_m & A + J_m B \end{bmatrix}.$$

b. Jika $S = \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & J_m B J_m \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{q}^T J_m \\ B & J_m \mathbf{p} & J_m A J_m \end{bmatrix}$ dan $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_m & \mathbf{0} & I_m \\ \mathbf{0}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}^T \\ -J_m & \mathbf{0} & J_m \end{bmatrix}$ maka S similar dengan matriks diagonal

$$\text{blok } D_2 = \begin{bmatrix} A - J_m B & \mathbf{0} & O_m \\ \mathbf{0}^T & \alpha & \sqrt{2} \mathbf{q}^T \\ O_m & \sqrt{2} \mathbf{p} & A + J_m B \end{bmatrix}$$

Dari Teorema 1 diperoleh tiga akibat sebagai berikut.

Akibat 2. Determinan dari matriks centro-simetris adalah

a. Untuk n genap

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix} \right) = \det(A - J_m B) \det(A + J_m B).$$

b. Untuk n ganjil

$$\det \left(\begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & J_m B J_m \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{q}^T J_m \\ B & J_m \mathbf{p} & J_m A J_m \end{bmatrix} \right) = \det(A - J_m B) \det \left(\begin{bmatrix} \alpha & \sqrt{2} \mathbf{q}^T \\ \sqrt{2} \mathbf{p} & A + J_m B \end{bmatrix} \right).$$

Akibat 3. Jika $S = \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix}$ serta matriks $A - J_m B$ dan $A + J_m B$ tak singular maka

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} F^{-1} + G^{-1} & (G^{-1} - F^{-1}) J_m \\ J_m (G^{-1} - F^{-1}) & J_m (F^{-1} + G^{-1}) J_m \end{bmatrix}.$$

dengan $F = A - J_m B$ dan $G = A + J_m B$.

Akibat 4. Nilai eigen dari matriks *centro*-simetris adalah

a. Untuk n genap

Nilai eigen dari $S = \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix}$ adalah nilai eigen dari matriks $A - J_m B$ dan nilai eigen dari matriks $A + J_m B$.

b. Untuk n ganjil

Nilai eigen dari $S = \begin{bmatrix} A & \mathbf{p} & J_m B J_m \\ \mathbf{q}^T & \alpha & \mathbf{q}^T J_m \\ B & J_m \mathbf{p} & J_m A J_m \end{bmatrix}$ adalah nilai eigen dari matriks $A - J_m B$ dan nilai eigen dari matriks $\begin{bmatrix} \alpha & \sqrt{2} \mathbf{q}^T \\ \sqrt{2} \mathbf{p} & A + J_m B \end{bmatrix}$.

Bentuk vektor eigen dari matriks *centro*-simetris diperlihatkan dalam Teorema berikut.

Teorema 2. Diberikan matriks *centro*-simetris $S = \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix}$.

a. Jika vektor eigen dari $A - J_m B$ adalah \mathbf{y} maka vektor eigen dari S adalah $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ -J_m \mathbf{y} \end{bmatrix}$.

b. Jika vektor eigen dari $A + J_m B$ adalah \mathbf{z} maka vektor eigen dari S adalah $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ J_m \mathbf{z} \end{bmatrix}$.

Bukti.

a. Misalkan nilai eigen dari $A - J_m B$ adalah λ dengan vektor eigen yang bersesuaian adalah \mathbf{y} . Harus ditunjukkan bahwa berlaku $S\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} S\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ -J_m \mathbf{y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A\mathbf{y} - J_m B\mathbf{y} \\ B\mathbf{y} - J_m A\mathbf{y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A - J_m B)\mathbf{y} \\ -J_m (A - J_m B)\mathbf{y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{y} \\ -J_m \lambda \mathbf{y} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ -J_m \mathbf{y} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \mathbf{v} \end{aligned}$$

Karena $S\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ maka terbukti $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ -J_m \mathbf{y} \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari S .

b. Misalkan nilai eigen dari $A + J_m B$ adalah β dengan vektor eigen yang bersesuaian adalah \mathbf{z} .

Harus ditunjukkan bahwa berlaku $S\mathbf{w} = \beta\mathbf{w}$.

$$\begin{aligned}
 S\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} A & J_m B J_m \\ B & J_m A J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ J_m \mathbf{z} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A\mathbf{z} + J_m B\mathbf{z} \\ B\mathbf{z} + J_m A\mathbf{z} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (A + J_m B)\mathbf{z} \\ J_m (A + J_m B)\mathbf{z} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \beta\mathbf{z} \\ J_m \beta\mathbf{z} \end{bmatrix} \\
 &= \beta \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ J_m \mathbf{z} \end{bmatrix} \\
 &= \beta\mathbf{w}
 \end{aligned}$$

Karena $S\mathbf{w} = \beta\mathbf{w}$ maka terbukti bahwa $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ J_m \mathbf{z} \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari S .

Daftar Pustaka

- [1] A.C.Aitken., Determinants and Matrices, Edinburgh. Oliver and Boyd, 1939.
- [2] F. Graybill, Introduction to Matrices with Application in Statistics, Wadsworth. Belmont., 1969.
- [3] A. C. a. P. Butler, "Properties of the Eigen vectors of Persymmetric Matrices with Applications to Communication Theory. IEEE Transactions on Communications.," vol. 24, pp. pp 804-809, 1976.
- [4] J. Delmas, "On Adaptive EVD Asymptotic Distribution of Centro-Symmetric Covariance Matrices". IEEE Transactions on Signal Processing, " Vol.47, pp.1402-1406, 1999.
- [5] W. Chen, Y.Yu and X. Wang, "Reducing the Computational Requirement of Differential Quadrature Method". Numerical Methods for Partial Differential Equations," Vol.12, pp.565-577, 1996.
- [6] F. Stenger, "Matrices of Sinc Methods," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 86, pp.297-310, 1997.
- [7] R. B. Mattingly, "Even Order Regular Magic Squares Are Singular," *The American Mathematical Monthly*, Vol.107, pp. pp.777-782, 2000.
- [8] L. Datta and S. Morgera, "Some Results on Matrix Symmetries and a Pattern Recognition Application," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol.34, No.4, pp.992-994, 1986.